3. 高次元空間における非線型モード(II. 古典ソリトン,特に高次元ソリトン,ソリトン系のダイナミックスとそれに関するカオスの問題,基研長期研究会報告)

武野, 正三

$$\left.\begin{aligned} \omega &= K\,(K^2-|\varepsilon|)^{1/2}, \\ A &= [\,(4K^2-|\varepsilon|)/(K^2-|\varepsilon|)\,]^{1/2}\,。\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

である。上の解は$K^2-|\varepsilon|$が正負にかゝわらず成立する。(17)は$\tau=0$で$u=12K^2\,\mathrm{sech}^2(K\eta)$というソリトン型のパルスとなるが，有限の$\tau$で分母が0となるので爆発現象をひきおこす。そのときの波形は，数値計算で求められたexplosive modeの波形と良く一致している。(17)のexplosive modeは$\varepsilon>0$でも可能である。その場合，ωとAは(18)で$|\varepsilon|\to-\varepsilon$とおいたものになっている。また，$\varepsilon>0$での線形不安定モードの非線形発展を記述する正確解も求めることができる。この解は，ごく初期には線形不安定性によって増幅する正弦波に一致し，時間とともに波の山のところでピークは鋭く立ち上り，腹の部分は平担化して，パルス的な波形が形成され，最終的にEXPLOSIVE MODEにつながる。

こゝで考えた不安定系では，ソリトンは振幅が小さいところでのみ意味をもつ。そこでは系の非線形発展は独立な3個のKdVモードの重ね合せで記述される。振幅が大きくなると，ソリトンは安定に存在できず，EXPLOSIONの現象をひきおこす。このexplosive modeは不安定性の非線形過程と考えられ，(1)の系では非線形項は全く安定化作用を持たないことを示している。現実のビームプラズマ系では，ポテンシアルピークのところでのビームイオンの反射によってexplosive modeは安定化されると考えられるが，これは今後の問題である。

高次元空間における非線型モード

京工繊大・工芸　武　野　正　三

§1. Introduction

ソリトン理論のessenceの一つは非線型微(差)分方程式に対する広田の双一次形式[1]の存在である。最も簡単且つ一般的なものは次の双一次方程式

$$F(D_x, D_y, D_z, D_t)\,f\cdot f=0 \quad \text{with} \quad F(0,0,0,0)=0 \qquad (1)$$

である。ここにFはD_x等の偶関数である。ソリトンは，fを$\exp(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\,(\vec{k}=(k_x,$

k_y, k_z)；$\vec{r} = (x, y, z)$）の形で表わし，D-演算子の性質 $D_x^n \mathrm{e}^{px} \cdot \mathrm{e}^{qx} = (p-q)^n \exp[(p+q)x]$ $(n=1,2,\cdots)$ を用いることにより得られる。要するに，広田理論の立場に立てば，ソリトンとは，imaginary な波数ベクトルと振動数を持つ平面波的モードと云っても過言ではないであろう。このような意味に於て，ソリトンは，相互衝突後もその個性を保持する本質的に一次元的モードである。

空間の次元数が2以上になると，一次元の場合と異なった様相が出現することは容易に想像できる。即ち，本質的に空間二次元以上の場合に固有な非線型モードの存在，また，ソリトン衝突の別の channel が開くようになる。前者の典型的な例の一つは渦モードであり，後者のそれは，ソリトンの共鳴[2] であろう。本講演に於ては，高次元 sine-Gordon 方程式に固有な新らしい型の渦的モード[3] と，高次元戸田格子方程式に於ける ripplon モード[4] につき，その概要を述べることにする。

§2 高次元 sine-Gordon 方程式の渦的解

高次元 sine-Gordon 方程式

$$[\Delta - (\partial^2/\partial t^2)]\, u = \sin u \tag{2}$$

は物理学，数学の色々な分野に現われる非線型方程式でそれは ubiquitous equation とみなすことができる。(2) は一次元的 kink 解，及び共鳴 kink 解を持つことは周知の通りであるが，(2) はまた，

$$u = 4\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{k^2-\omega^2}{k'^2-\omega^2}}\ \frac{\sinh(\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega' t)}{\sinh(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right\} \tag{3}$$

with

$$k^2 + k'^2 - \omega^2 - \omega'^2 = 1, \qquad \vec{k}\cdot\vec{k}' - \omega\omega' = 0 \tag{4}$$

の型の厳密解を持つことを容易に示すことができる[3]。(3)，(4) が原点の近傍で渦的性質を示すことは，例えば，次のような特別な場合を考えれば直ちに分かる。即ち，

$$k'_x = k_y = 0 \quad \text{and} \quad \omega = 0 \quad \text{or} \quad \omega' = 0 \tag{5}$$

$\omega' = 0$ のときは，$k_x \equiv k_1$，$\omega \equiv \omega_1$ とおくと

$$u = 4\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{\dfrac{x-v_1 t}{\sqrt{1-v_1^2}}}\right) \qquad \text{as} \qquad \begin{array}{r} x - v_1 t \to 0 \\ y \to 0 \end{array} \tag{6}$$

となる。これは，x 軸の正の向きに速さ v_1 で動く渦を表わす。原点より十分遠方に於ては，(3) は

$$u = 4\tan^{-1}\{\text{const}\ \exp[(\vec{k}' - \vec{k})\cdot\vec{r} - (\omega' - \omega)t]\} \tag{7}$$

$$\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega' t \gg 1, \quad \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t \gg 1$$

となり，これは kink に外ならない。結局，(2) は原点の近傍に於て渦的解，十分遠方に於て kink 解を持つことが分った。(3) に於て，$\omega = \omega' = 0$，且つ空間二次元の場合，ここに得られた解は，次の 2－soliton 解の一般形

$$u = 4\ \tan^{-1}\left\{\frac{e^{k_{1x}x + k_{1y}y + \eta_1^0} + e^{k_{2x}x + k_{2y}y + \eta_2^0}}{1 + \dfrac{(k_{1x} - k_{2x})^2 + (k_{1y} - k_{2y})^2}{(k_{1x} + k_{2x})^2 + (k_{1y} + k_{2y})^2}\, e^{(k_{1x} + k_{2x})x + (k_{2x} + k_{2y})y + \eta_1^0 + \eta_2^0}}\right\} \tag{8}$$

に於て η_1^0 と η_2^0 を適当に取ることにより得られることを示すことができる。即ち，(3) は 2－kink 解のある特別な場合である[5]。従って，ここに得られた vortex は，衝突する場合，4－kink 解の満すべき条件[6]が成り立てば，ソリトン的衝突を示すことが分かる。ここに得られた新らしい型の解は色々な物理的応用を持っていると思われるが，この点については議論を省くことにする。

(2)，(3) より，同様な型の解が類似の型の非線型方程式：

$$[\Delta - (\partial^2/\partial t^2)]u = -\sin u \tag{9a}$$

$$[\Delta - (\partial^2/\partial t^2)]u = \sinh u \tag{9b}$$

$$[\Delta - (\partial^2/\partial t^2)]u = -\sinh u \tag{9c}$$

についても存在することを示すことができる。これ等の方程式は，二次元プラズマの問題，ゲージ場方程式等に現われる。ここに得られた解が，これ等の問題に於て物理的にどのような意味を持っているかを考察することも興味あることのように思われる。

§3　高次元戸田格子方程式の ripplon 解

広田理論の立場に立てば

$$f(n_1+1, n_2, n_3, n_4)\, f(n_1-1, n_2, n_3, n_4)+f(n_1, n_2+1, n_3, n_4)\, f(n_1, n_2-1, n_2, n_4)$$
$$+f(n_1, n_2, n_3+1, n_4) f(n_1, n_2, n_3-1, n_4)+f(n_1, n_2, n_3, n_4+1)\, f(n_1, n_2, n_3, n_4-1)$$
$$+Cf(n_1, n_2, n_3, n_4)^2=0 \tag{10}$$

の型の非線型差分方程式はソリトン方程式の或る意味での母関数とみなすことができる[7]。この式に於て $n_1\to x$, $n_2\to y$, $n_4\to \mathrm{i}\,t$ の如く連続体近似をとり，$n_3\equiv n$ については差分形式を残すと，$f(n_1, n_2, n_3, n_4)\to f_n(x, y, t)\equiv f_n$ に対して

$$f_n\{(\partial^2/\partial x^2)+(\partial^2/\partial y^2)-(\partial^2/\partial t^2)\}\, f_n-\{(\partial f_n/\partial x)^2+(\partial f_n/\partial y)^2-(\partial f_n/\partial t)^2\}$$
$$+f_{n+1}\, f_{n-1}-f_n^2=0 \tag{11}$$

(11)式は次の変換

$$-\{(\partial^2/\partial x^2)+(\partial^2/\partial y^2)-(\partial^2/\partial t^2)\}\ \ln f_n=(K_2\beta/m)\}\ \mathrm{e}^{-\beta(u_n-u_{n-1})}-1\} \tag{12}$$

により高次元戸田格子方程式

$$m\ddot{u}_n=K_1\{(\partial^2/\partial x^2)+(\partial^2/\partial y^2)\}\, u_n+K_2\{\mathrm{e}^{-\beta(u_n-u_{n-1})}-\mathrm{e}^{-\beta(u_{n+1}-u_n)}\}$$
$$x'=(m/K_1)\,x\to x,\qquad y'=(m/K_1)\,y\to y \tag{13}$$

に移行する。(11)は次の変換

$$\left.\begin{array}{l}\{(\partial^2/\partial x^2)+(\partial^2/\partial y^2)-(\partial^2/\partial t^2)\}\,\alpha\equiv\tilde{\triangle}\alpha=\pm\alpha,\ \tilde{\triangle}\beta=\pm\beta,\\ \{(\partial\alpha/\partial x)^2+(\partial\alpha/\partial y)^2-(\partial\alpha/\partial t)^2\}\,\alpha\equiv(\tilde{\nabla}\alpha)^2=\pm\alpha^2,\ (\tilde{\nabla}\beta)^2=\pm\beta^2\end{array}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{\nabla}\alpha\cdot\tilde{\nabla}\beta=0\\ X=\ln\alpha,\qquad Y=\ln\beta\end{array}\right. \tag{15}$$

により

$$f_n\{(\partial^2 f_n/\partial X^2)+(\partial^2 f_n/\partial Y^2)\}-\{(\partial f_n/\partial X)^2+(\partial f_n/\partial Y)^2\}\pm(f_{n+1}\, f_{n-1}-f_n^2)=0 \tag{16}$$

に reduce する。(14)の解は

$$\alpha=\sum_i \exp(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega_i t),\quad \beta=\sum_i \exp(\vec{k}'_i\cdot\vec{r}-\omega'_i t) \tag{17}$$

$$\begin{cases} k_i^2-\omega_i^2=\pm 1,\ (\vec{k}_i-\vec{k}_j)^2-(\omega_i-\omega_j)^2=0 \\ \vec{k}'^2_i-\omega'^2_i=\pm 1,\ (\vec{k}'_i-\vec{k}'_j)^2-(\omega'_i-\omega'_j)^2=0 \\ \vec{k}_1\cdot\vec{k}'_j-\omega_i\omega'_j=0 \end{cases} \tag{18}$$

の如く求められる。中村により得られた結果[4)]を用いれば，非線型微差分方程式(16)より次の形の解

$$f_n=\begin{cases} \mathrm{I}_n(R) & \text{for } + \text{ sign} \\ \mathrm{J}_n(R) & \text{for } - \text{ sign} \end{cases}\qquad R=\sqrt{X^2+Y^2} \tag{19}$$

および

$$f_n=1+\varepsilon\sum_{m=n}^{\infty}\begin{cases} (-1)^m\,\mathrm{I}_m(R) & \text{for } + \text{ sign} \\ \mathrm{J}_m(R)^2 & \text{for } - \text{ sign} \end{cases} \tag{20}$$

が得られる。(20)がripplon解に対応する。(19),(20)はBessel関数I及びJで表わされる高次元固有のcylindrical symmetricな解である。この種の解の物理的意味については，これから考慮する必要があるかも知れない。

§4　結　　論

高次元sine-Gordon方程式に於ける新らしい型の渦解，高次元戸田格子方程式に於けるripplon解につき論じた。前者は種々の物理的問題に対して適用され，新らしい物理的結果が得られることも期待され，今後の課題としたい。

その他，プラズマ物理学，スピン系，一般相対論，ゲージ場方程式等に於ても高次元空間に固有な非線型モードが存在する。そして，それ等の中のあるものは，カオスの問題と関連して考察されなければならないことを附記しておきたい。

とも角，高次元空間に於ては，それに固有な種々のタイプの非線型モードが更に見出されることが期待される。これ等も今後の課題としたい。

References

1) R. Hirota, in *Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons and Their*

Applications, Lecture Notes in Mathematics No. 515 (1974), p. 40.
2) J. W. Miles, J. Fluid Mech. **79** (1977), 157, 171.
3) S. Takeno, Prog. Theor. Phys. **68** (1982), 992.
4) A. Nakamura, J. Phys. Soc. Japan **52** (1983), No. 3, to be published.
5) A. Nakamura, 物性研究 **39** (1982), No. 2, p. 125.
6) R. Hirota, J. Phys. Soc. Japan **33** (1972), 1459; **35** (1973), 1566. K. K. Kobayashi and M. Izutsu, J. Phys. Soc. Japan **41** (1976), 1091.
7) R. Hirota, J. Phys. Soc. Japan, **50** (1981), 3785.

ソリトンとカオス

東大物性研　今　田　正　俊

非線型現象についての最近の研究を振り返ってみると，著しい進歩をとげてきた二つの分野がある。一つはソリトンに関する研究であって，この研究を通じて明らかにされてきたことは，非線型系の持つ秩序性，整合性，あるいは相関がいつまでも失われないような運動形態といったような側面であった。もう一方の潮流というのはカオスについての研究である。比較的自由度の少ない非線型力学系を調べることによって，わかってきたことは，非線型系が内在的に持っている，無秩序性，不安定性，乱雑さである。それぞれの場合に対象としている系やモデルが異なっているとはいえ，二つの独立した研究の流れは，おそらく，非線型という一つの出発点から帰結する全く対照的な性格を明らかにしてきている。

カオスの研究では，系を自由度の少ない場合に帰着させ，簡単な力学系の問題として扱うことが多い。もしも調べようとする物理量が空間座標に依存していたりして，自由度が大変多いかあるいは無限大であるような場合は，例えば空間変化が小さい等の近似がしばしば用いられる。しかしながら，自由度の多い多体系においては，欠陥や渦のような空間構造が本質的な役割を果たすことは多い。実際，乱流状態への転移にともなって，空間変化の激しい状態が生ずることがあるのはよく知られている。ここで私が考察する問題は，自由度の少ない系に帰着すると見落としてしまいかねない形でのカオスの発生，すなわち，空間構造によって引き起こされるカオスの問題である。ソリトンを持つ完全可積分系として知られる一次元系に，摂動を加えることにより，カオス的なふるまいがどのように生まれてくるかを考えてみよう。